

OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO BASEADA EM ENSINO E APRENDIZAGEM APLICADA À VERSÃO ROBUSTA DO PROBLEMA DA VIGA EM SEÇÃO I

Marcos Amaral Mendonça

Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal
Rodovia LMG 818, km 6, 35690-000 - Florestal - MG
marcos.a.mendonca@ufv.br

Marcus Henrique Soares Mendes

Universidade Federal de Viçosa - Campus Florestal
Rodovia LMG 818, km 6, 35690-000 - Florestal - MG
marcus.mendes@ufv.br

RESUMO

A presença de incertezas, como as paramétricas, em problemas de otimização pode fazer com que soluções nominais se tornem inviáveis. Neste artigo é proposto um algoritmo baseado na meta-heurística Otimização baseada em Ensino e Aprendizagem (TLBO) que resolve a versão robusta do Problema da Viga em Seção I (PVSI), levando em consideração tal tipo de incerteza. A implementação possui um algoritmo não robusto chamado NMOTLBO que obtém as soluções que desconsideram incertezas (soluções nominais), e um algoritmo robusto com a aplicação de duas técnicas para lidar com incertezas, o WCSA (RMOTLBO-WCSA) e o WCE (RMOTLBO-WCE). Os experimentos mostram que as soluções nominais, quando na presença de incertezas, possuem uma piora drástica nos valores de suas funções objetivos. Além disso, os resultados indicam, por meio das métricas Hipervolume e IGD que as soluções robustas encontradas são melhores do que as soluções nominais quando submetidas aos piores casos de incertezas.

PALAVRAS CHAVE. Otimização baseada em Ensino e Aprendizagem, Otimização Multiobjetivo, Otimização Robusta.

Área Principal: MH - Meta-heurísticas

ABSTRACT

The presence of uncertainties, such as parametric ones, in optimization problems can cause nominal solutions to become infeasible. In this paper we propose an algorithm based on the metaheuristic Teaching-learning-based optimization (TLBO) that solves the robust version of the I-Beam Problem, taking into account this type of uncertainty. The implementation has a non-robust algorithm called NMOTLBO that obtains solutions that disregard uncertainties (nominal solutions), and a robust algorithm with the application of two uncertainty techniques, the WCSA (RMOTLBO-WCSA) and the WCE (RMOTLBO-WCE). The experiments show that nominal solutions, when in the presence of uncertainties, have a drastic deterioration in the values of their objective functions. In addition, the results indicate that through the Hypervolume and IGD metrics the robust solutions found are better than the nominal solutions when subjected to the worst cases of uncertainties.

KEYWORDS. Teaching-learning-based optimization. Multi-objective optimization. Robust optimization.

Main Area: MH - Metaheuristics

1. Introdução

Problemas de otimização, principalmente na área de engenharia, estão sujeitos a incertezas, as quais podem ser associadas a imprecisões nas medidas das variáveis de decisão, mudanças nas condições do ambiente, entre outros. Deste modo, uma solução que desconsidera as incertezas (solução nominal) ótima encontrada para um dado problema pode acabar se tornando completamente sem sentido na prática [Ben-Tal et al., 2009].

Neste cenário, tem-se então a formulação de problemas robustos, e a resolução deste tipo de problema acaba se resumindo a encontrar soluções que, apesar de estarem sujeitas a pequenas incertezas, mantenham-se factíveis para o nível de incerteza especificado no modelo e boas em termos de desempenho.

O problema da Viga em Seção I [Coello e Christiansen, 1998] é um problema multi-objetivo, conhecido na área da engenharia e se enquadra perfeitamente no contexto de problemas robustos. Quanto à questão deste problema na literatura, no trabalho de Rao et al. [2011] o Problema da Viga em Seção I é solucionado pelos algoritmos evolutivos (*NSGA-II*, *MOPSO-CD*, *RM-MEDA* e *MOTLBO*), porém sem levar em consideração a incerteza relacionada ao problema. E no trabalho de Mendes [2013], uma formulação robusta do Problema da Viga em Seção I é proposta e resolvida por meio do algoritmo *Interval Robust Multi-Objective Evolutionary Algorithm - Minimax*.

Em vista disso, o objetivo geral deste trabalho visa resolver a versão robusta do problema da viga em seção I utilizando a meta-heurística Otimização baseada em Ensino e Aprendizagem (TLBO - *Teaching-Learning-Based Optimization*) [Rao et al., 2011], levando em consideração o pior caso das incertezas inerentes ao problema.

Na Seção 2, será apresentada a formulação matemática do Problema da Viga em Seção I; a Seção 3 apresenta a meta-heurística Otimização baseada em Ensino e Aprendizagem; a Seção 4 apresenta conceitos de incerteza e robustez; na Seção 5 será apresentada a versão multiobjetivo da meta-heurística TLBO; a Seção 6 apresenta as metodologias aplicadas; na Seção 7 apresentam-se os experimentos e resultados; e na Seção 8 tem-se a conclusão.

2. Problema da Viga em Seção I

O Problema da Viga em Seção I (PVSI) ilustrado pela Figura 1 e extraído de [Coello e Christiansen, 1998], é um problema multiobjetivo conhecido na área da engenharia. O PVSI consiste em encontrar as dimensões $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ para uma viga em seção I de modo a minimizar a área da seção transversal (Equação 1) e o deslocamento estático máximo (Equação 2), respeitando-se a restrição de projeto relacionada às cargas P e Q (Equação 3).

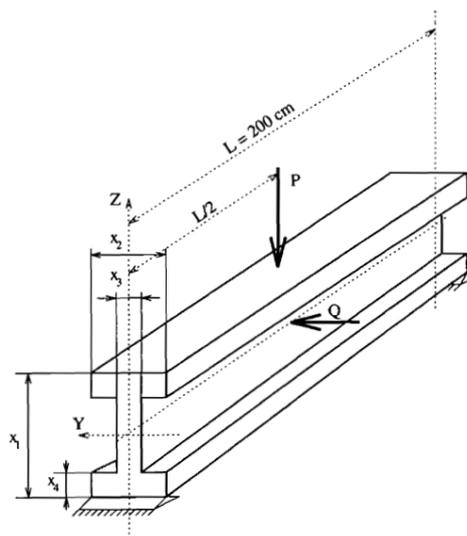


Figura 1: Viga em Seção I [Coello e Christiansen, 1998]

A formulação matemática da versão robusta do problema da viga é dada abaixo, as variáveis de decisão \mathbf{x} são dadas em centímetros, a função objetivo relacionada à área da seção transversal é dada em centímetros quadrados e o deslocamento estático máximo é dado em centímetros. A variável p que está relacionada a cada variável de decisão na formulação matemática, diz respeito à incerteza especificada para este problema.

$$x_1 \in [10; 80], x_2 \in [10; 50], x_3 \in [0, 9; 5], x_4 \in [0, 9; 5], p \in [-1; 1]$$

$$f_1(\mathbf{x}, p) = 2(x_2 + p)(x_4 + p) + (x_3 + p)((x_1 + p) - 2(x_4 + p)) \quad (1)$$

$$f_2(\mathbf{x}, p) = \frac{60.000}{(x_3 + p)((x_1 + p) - (x_4 + p))^3 + 2(x_2 + p)(x_4 + p)[4(x_4 + p)^2 + 3(x_1 + p)((x_1 + p) - 2(x_4 + p))]} \quad (2)$$

$$g(\mathbf{x}, p) = -\frac{180.000(x_1 + p)}{(x_3 + p)((x_1 + p) - (x_4 + p))^3 + 2(x_2 + p)(x_4 + p)[4(x_4 + p)^2 + 3(x_1 + p)((x_1 + p) - 2(x_4 + p))]} + 16 - \frac{15.000(x_2 + p)}{((x_1 + p) - 2(x_4 + p))(x_3 + p)^3 + 2(x_4 + p)(x_2 + p)^3} \geq 0 \quad (3)$$

3. Otimização baseada em Ensino e Aprendizagem (TLBO)

Em 2011 foi proposta a meta-heurística Otimização Baseada em Ensino e Aprendizagem [Rao et al., 2011], essa meta-heurística assim como várias outras presentes na literatura se inspira na natureza. A TLBO é recomendada para problemas de design mecânico, os quais utilizam um conjunto de soluções que compõem uma população para avançar em direção da solução global. A principal característica deste método em relação aos demais, é que este não necessita de parâmetros a serem configurados, diferentemente dos algoritmos genéticos que, por exemplo, demandam a taxa de cruzamento, a probabilidade de mutação, entre outros parâmetros.

Na TLBO a população é considerada uma turma de alunos onde cada aluno representa uma solução e, analogamente, cada variável de decisão é considerada como um assunto ou conteúdo passado em sala de aula. O método é dividido em duas etapas: a primeira etapa é chamada de *Fase de Ensino* e consiste nos alunos adquirirem conhecimento através de um professor previamente escolhido antes de cada iteração do método, e a segunda etapa é chamada de *Fase de Aprendizagem* na qual os alunos, após adquirirem conhecimento com o professor, irão interagir entre si seja por meio de estudo em grupo ou discussões para elevarem seu nível de conhecimento. A Figura 2 apresenta o fluxograma que demonstra o funcionamento básico da meta-heurística Otimização Baseada em Ensino e Aprendizagem proposto por Rao et al. [2011].

Na Fase de Ensino, a escolha do professor é feita selecionando-se o melhor aluno (solução) da turma, levando em consideração o valor da *fitness* do mesmo. Os únicos dois valores que devem ser informados a princípio para o algoritmo, são a quantidade de soluções e a quantidade máxima de avaliações da *fitness*, que implica diretamente no critério de parada do algoritmo.

4. Incerteza e Robustez

No que diz respeito à robustez, o trabalho de Perny et al. [2006] diz que o termo robusto está sendo empregado para caracterizar uma estratégia flexível, solução prudente ou até mesmo uma conclusão estável. Porém, na literatura, há vários conceitos relacionados à incerteza e robustez, o que faz com que não tenhamos uma uniformidade de conceitos.

Beyer e Sendhoff [2007] definem quatro tipos de incertezas no âmbito de otimização de projeto robusto:

- A. Mudança do ambiente: envolve a variação de temperatura, umidade, alterações nas propriedades dos materiais.

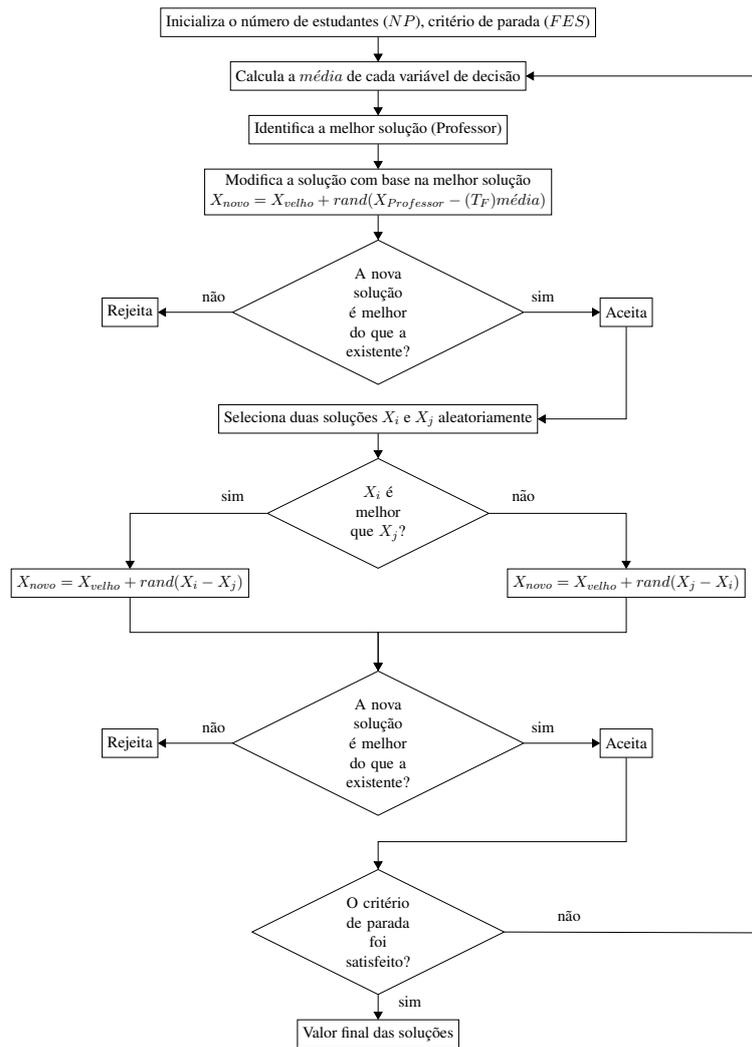


Figura 2: Fluxograma TLBO [Rao et al., 2011]

- B. Tolerância de produção: considerada como uma perturbação nas variáveis de decisão do problema.
- C. Incertezas nas saídas do sistema: relacionadas a erros de simulação nos modelos originais.
- D. Incerteza de Viabilidade: estão diretamente relacionadas às restrições do problema.

E ainda segundo Beyer e Sendhoff [2007] as incertezas podem ser quantificadas de três formas diferentes:

1. Incerteza Probabilística: é conhecido *a priori* a probabilidade de que uma incerteza esteja em determinada faixa de valores [Dubois e Prade, 2009].
2. Incerteza Determinística: a incerteza pode assumir um valor definido em um intervalo fechado.
3. Incerteza Possibilística: é definido um intervalo nebuloso (*fuzzy set*) em que a incerteza pode oscilar.

Por isso, até doze conceitos de robustez podem ser encontrados em problemas reais, o que faz fortalecer que projetos apresentem os conceitos de robustez em sua modelagem.

Neste trabalho, as incertezas são consideradas do tipo determinístico, pois assumem um valor definido em um intervalo fechado conforme proposto na formulação matemática do problema, e representam variações das medidas da Viga em Seção I, variações estas que podem ocorrer em virtude de erros de medida ou condições do tempo, por exemplo.

5. Otimização Multiobjetivo baseada em Ensino e Aprendizagem

Na implementação da meta-heurística utilizada como base foram utilizados alguns conceitos recorrentes de problemas multiobjetivos. O conceito de Classificação de não Dominância (*Nondominated Sorting*) foi utilizado para selecionar as melhores soluções. O conceito de Distância de Multidão (*Crowding Distance*) também foi utilizado para a escolha do professor (solução) em relação à população. A seguir, cada conceito será melhor detalhado.

5.1. Classificação de não Dominância

Este conceito é utilizado para determinar qual solução é melhor em termos de *fitness* quando se compara duas soluções. Segundo o trabalho de Deb et al. [2000], para encontrar a classificação de não-dominância de uma população é necessário calcular duas variáveis para cada solução: n_i , o número de soluções que dominam a solução i , e S_i , o conjunto de soluções que a solução i domina.

A partir disso, para cada solução i com $n_i = 0$, é visitada cada solução j que compõe o conjunto S e é feita uma redução em uma unidade a variável n_i desta solução j . Após este passo, todas as soluções presentes no conjunto S em que a variável n_i se tornar zero, estas soluções são identificadas como pertencentes à segunda frente e são adicionadas à um conjunto P . Este procedimento é continuado para as soluções presentes em P para obtenção da terceira frente e assim por diante.

Ao final do procedimento serão obtidas todas as frentes para esse conjunto de soluções que compõe a população. A primeira frente também é conhecida como *frente de pareto*, e as soluções que pertencem a esta frente são não-dominadas entre si e dominam outras soluções de outras frentes.

5.2. Distância de Multidão

A Distância de Multidão [Deb et al., 2000] é usada para verificar a densidade de soluções nas proximidades de uma dada solução na população. Para calcular esta densidade é necessária a ordenação da função objetivo 1 de modo crescente de todas as soluções que pertencem à mesma frente.

Na sequência, os valores extremos (menor e maior valor de função objetivo) recebem um valor de distância infinito, e todas as outras soluções recebem um valor de distância igual à diferença normalizada absoluta nos valores de função de duas soluções adjacentes. Depois esse processo é repetido para cada função objetivo presente no problema multiobjetivo. Ao final desses cálculos para cada função objetivo, a distância de multidão de uma solução é dada como a soma dos valores de distâncias individuais correspondentes a cada objetivo.

Este conceito de distância de multidão é usado em dois momentos, conforme será mostrado no pseudocódigo da próxima seção. O primeiro momento é quando necessita-se selecionar um professor (solução) na população, neste momento, qualquer solução que pertence à primeira frente (*frente de pareto*) é uma boa solução candidata pelo fato das soluções serem não dominadas entre si. Porém, apenas uma solução deve ser escolhida e, deste modo, é escolhida a solução que possuir maior distância de multidão, pelo fato da mesma representar uma área mais esparsa nas suas proximidades.

E o segundo momento ocorre quando é necessário selecionar apenas metade da população para continuar o processo de otimização, e neste momento, o primeiro critério a ser analisado entre as soluções é a classificação de não dominância. Caso haja o contexto em que deve ser escolhida algumas soluções de uma mesma frente (soluções não dominadas), as soluções com menores

distâncias de multidão devem ser escolhidas para deixarem a população, pelo fato daquela região já estar bem representada por outras soluções.

5.3. Pseudocódigo

A meta-heurística Otimização Multiobjetivo baseada em Ensino e Aprendizagem (MO-TLBO) proposta por Zou et al. [2013], é uma extensão da meta-heurística Otimização baseada em Ensino e Aprendizagem (TLBO) [Rao et al., 2011]. A diferença entre ambas, é que o MOTLBO lida com problemas multiobjetivos e necessita de conceitos especiais para avaliação das mesmas. No Algoritmo 1 é mostrado o pseudocódigo desta meta-heurística. A fase de ensino está representada entre as linhas 6 e 17; e a fase de aprendizagem está delimitada pelas linhas 18 e 33.

Algoritmo 1: Otimização Multiobjetivo baseada em Ensino e Aprendizagem

```

1 Inicializa os valores  $NP$  e  $FES$ 
2 Gera aleatoriamente  $NP$  soluções
3 Avalia as  $NP$  soluções
4 enquanto não se atinge o critério de parada faça
5   Seleciona a centroide das soluções não dominadas como Média
6   para  $NP$  soluções faça
7     Seleciona Professor (nondominated sorting, crowding distance)
8      $U_i = X_i + \text{rand} * (\text{Professor} - (1 + \text{rand} * \text{Média}))$ 
9     Avalia o indivíduo trial  $U_i$ 
10    se  $U_i$  domina  $X_i$  então
11      Troca  $X_i$  por  $U_i$ 
12    senão
13      se  $U_i$  e  $X_i$  não se dominam então
14        Seleciona aleatoriamente entre  $X_i$  e  $U_i$ 
15      senão
16    fim
17  fim
18  para  $NP$  soluções faça
19    Seleciona aleatoriamente dois indivíduos de  $NP$ ,  $V_i$  e  $X_i$  (target)
20    se  $V_i$  domina  $X_i$  então
21       $U_i = X_i + (X_i - V_i)$ 
22    senão
23       $U_i = X_i + (V_i - X_i)$ 
24    fim
25    Avalia o indivíduo trial  $U_i$ 
26    se  $U_i$  domina  $X_i$  então
27      Troca  $X_i$  por  $U_i$ 
28    senão
29      se  $U_i$  e  $X_i$  não se dominam então
30        Seleciona aleatoriamente entre  $X_i$  e  $U_i$ 
31      senão
32    fim
33  fim
34  Seleciona  $NP$  soluções (nondominated sorting, crowding distance) das  $2NP$ 
    soluções na população
35 fim
36 Exibe as soluções

```

5.4. Tratamento de Restrições

O tratamento de restrições utilizado para a meta-heurística Otimização Multiobjetivo baseado em Ensino e Aprendizagem é o método proposto por Deb [2000]. Esse método compara duas soluções e faz a seleção de qual solução deve permanecer na população, com base nas três regras heurísticas:

- Se uma solução é viável e a outra é inviável, então a solução viável é escolhida.
- Se ambas as soluções são inviáveis, então a solução que tem a menor violação de restrição é escolhida.
- Se ambas as soluções são viáveis, então a solução não dominada é escolhida e, caso ambas pertençam à mesma frente, a escolha é feita aleatoriamente.

Este método é aplicado durante as fases de ensino e aprendizagem, mais precisamente após a geração do indivíduo U_i nas linhas 10 e 26 do Algoritmo 1. As duas soluções a serem comparadas são as soluções U_i e X_i em ambos os casos.

6. Metodologia

A meta-heurística Otimização Multiobjetivo baseada em Ensino e Aprendizagem implementada conforme o pseudocódigo do Algoritmo 1, é capaz de gerar três tipos de resultados distintos. O primeiro deles é a implementação NMOTLBO não robusta (versão nominal) que desconsidera as incertezas do problema, desse modo as variáveis p presentes na formulação matemática do Problema da Viga em Seção I são iguais a zero.

O segundo tipo chamado de RMOTLBO-WCSA, é o pior caso por amostragem, proposto por Soares et al. [2009]. O terceiro tipo de resultado é a aplicação do método de estimativa do pior caso de incerteza (*worst case estimation*), proposto por Steiner et al. [2004], cuja implementação é o RMOTLBO-WCE. Os dois últimos tipos de resultados são gerados através de uma implementação robusta.

Ambas as implementações robustas, são aplicadas à população de soluções através de métodos específicos, que fazem a perturbação de todas as soluções da população após a avaliação das soluções, identificado após a linha 3 do Algoritmo 1, e também após a avaliação dos indivíduos U_i gerados, que ocorre após as linhas 9 e 25. Dessa forma a população no decorrer de todo o processo de otimização, sempre trabalha com soluções robustas.

6.1. Pior Caso por Amostragem

O Pior Caso por Amostragem ou também chamado de WCSA (*worst case scenario approximation*) é uma metodologia proposta por Soares et al. [2009]. Nesta metodologia é considerado um conjunto de amostras e , para cada solução presente na população, essas amostras de incertezas são aplicadas na variável p presente na formulação matemática do problema.

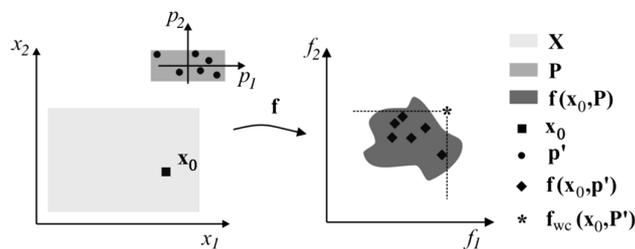


Figura 3: WCSA de uma solução x_0 com base no conjunto de amostras P [Soares et al., 2009]

Tendo como base este conjunto de soluções robustas que dizem respeito a uma única solução, que antes era nominal, agora deve-se selecionar a pior solução robusta com base no critério de não dominância entre as soluções para substituir a solução nominal inicial. E caso duas ou mais soluções sejam não-dominadas entre si como é o caso da Figura 3, a nova solução que irá compor a população terá valores de função objetivo com base na projeção da solução que contém o pior valor de função objetivo 1, e pela solução que contém o pior valor de função objetivo 2.

6.2. Estimativa do Pior Caso de Incerteza

Segundo Steiner et al. [2004], a estimativa do pior caso de incerteza (*worst case estimation*) ocorrerá em um dos vértices do domínio U , desde que a função em análise seja monotônica para todas as variáveis de decisão ou convexa.

Porém, dependendo da dimensão n do problema a ser otimizado, a avaliação de 2^n vértices para cada função objetivo se torna completamente inviável do ponto de vista computacional. Portanto, cabe estimar qual o vértice que determina o pior caso de incerteza através do cálculo das Equações 4 e 5, com custo computacional apenas de $2n + 1$ avaliações [Steiner et al., 2004].

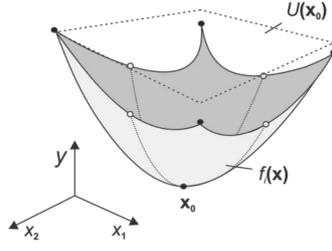


Figura 4: Função convexa definida em $U(x_0)$ [Steiner et al., 2004]

$$f_{wci}(\mathbf{x}_0, P) = \max\{f_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}^*), f_i(\mathbf{x}_0)\}$$

$$\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} \text{sign}(f_i(\mathbf{x}_0, \bar{p}_1) - f_i(\mathbf{x}_0, \underline{p}_1))\Delta_1 \\ \text{sign}(f_i(\mathbf{x}_0, \bar{p}_2) - f_i(\mathbf{x}_0, \underline{p}_2))\Delta_2 \\ \vdots \\ \text{sign}(f_i(\mathbf{x}_0, \bar{p}_{n_p}) - f_i(\mathbf{x}_0, \underline{p}_{n_p}))\Delta_{n_p} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Delta_j &= \bar{p}_j, \text{ se } \text{sign}(f_i(\mathbf{x}_0, \bar{p}_j) - f_i(\mathbf{x}_0, \underline{p}_j)) > 0 \\ \Delta_j &= \underline{p}_j, \text{ caso contrário.} \\ j &= 1, 2, \dots, n_p. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathbf{p}^* \in P, i = 1, 2, \dots, n_f$$

E mesmo que a função não seja convexa, nem monotônica em U , não se pode dizer com certeza se este método irá encontrar o pior caso de incerteza em um dos vértices, mas mesmo assim, ele pode ser utilizado como uma heurística de estimativa do pior caso de incerteza [Sabioni, 2017].

7. Experimentos e Resultados

Para realização dos experimentos e testes foi utilizado um processador Intel(R) Core(TM) i3-2328M, 2.20GHz com 8 GB de RAM. O algoritmo foi implementado no MOEA Framework, que é uma biblioteca Java de código aberto para desenvolvimento de algoritmos evolutivos multiobjetivos, e está disponível em www.moeaframework.org.

Para cada experimento, foram feitas 30 execuções usando-se 100 indivíduos (NP) constituindo uma população, e 10000 avaliações (FES) da função objetivo como número máximo de iterações. Para cada experimento realizado, o tempo para obter uma frente de pareto é em média 4,4 segundos e, foram utilizados NP igual a 100 e FES igual a 10000, pois usando valores maiores do que esses, os resultados obtidos se mantinham estagnados sem melhora significativa.

O primeiro resultado obtido aplicando-se a meta-heurística Otimização Multiobjetivo baseada em Ensino e Aprendizagem, foi a obtenção da fronteira de pareto nominal por meio do NMOTLBO, composta por soluções que desconsideram a incerteza do problema. Na sequência, foi encontrada a fronteira de pareto robusta para o pior caso por amostragem (RMOTLBO-WCSA) com 20 amostras, composta por soluções que levam em consideração a incerteza especificada para o problema.

Por fim, as soluções nominais encontradas foram aplicadas à uma amostra de 20 incertezas aleatórias com o intuito de descobrir qual seria o comportamento dessas soluções com as outras frentes encontradas. Este último caso é chamado de soluções nominais perturbadas e o resultado é exibido na Figura 5, que por sinal teve o eixo y representado em escala logarítmica para que todas as soluções pudessem ser representadas.

Outro método abordado foi a estimativa de pior caso de incerteza (*worst case estimation*) proposta por Steiner et al. [2004], com a implementação RMOTLBO-WCE. As soluções encontradas para esta estimativa de pior caso de incerteza utilizaram 5 amostras de incertezas, e estão representadas na Figura 6, sendo comparadas com a fronteira de pareto robusta para o pior caso de amostragem (RMOTLBO-WCSA), com 20 amostras e com a solução nominal (NMOTLBO), ambas obtidas e mostradas na Figura 5.

Neste trabalho, duas métricas de desempenho foram usadas para melhor analisar as frentes encontradas, *Hypervolume* (HV) e *Inverted Generational Distance* (IGD). A métrica HV calcula

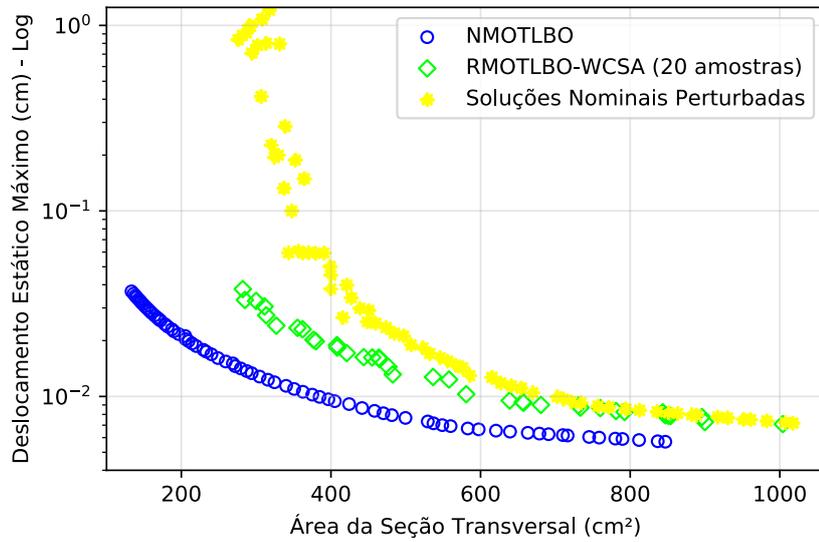


Figura 5: Gráfico representando as Soluções Nominais (NMOTLBO), Soluções pertencentes ao Pior Caso por Amostragem (RMOTLBO-WCSA) e Soluções Nominais Perturbadas

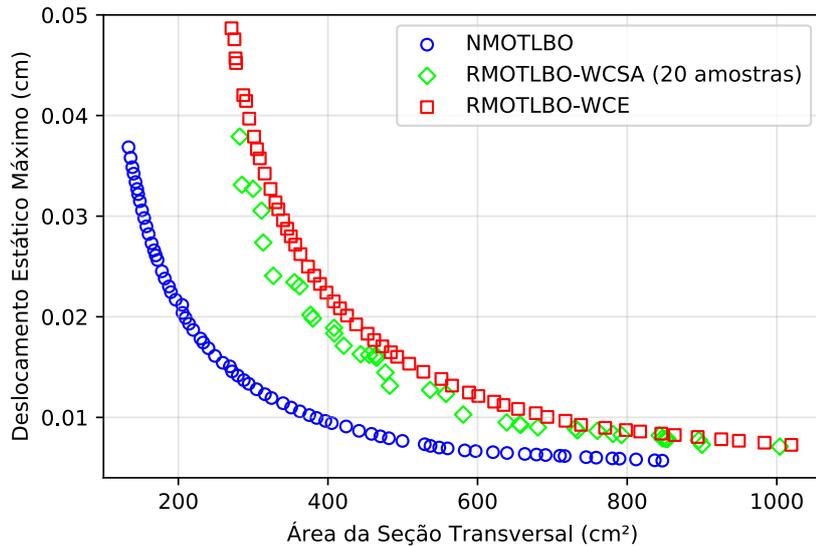


Figura 6: Gráfico representando as Soluções Nominais (NMOTLBO), Soluções pertencentes ao Pior Caso por Amostragem (RMOTLBO-WCSA) e a Estimativa do Pior Caso de Incerteza (RMOTLBO-WCE)

a área dominada pelas soluções de Pareto, refletindo a dominância das frentes [Bader, 2010]. Desta maneira, quanto maior o valor do HV, melhores são as soluções representadas por uma dada frente. O IGD faz seu cálculo comparando dois conjuntos de soluções e medindo a diferença entre eles [Collo et al., 2007]. Assim, quanto menor o valor encontrado no IGD para um conjunto de soluções, melhores essas soluções são em relações às demais.

As duas métricas foram aplicadas para 30 execuções nas soluções encontradas para a frente de pareto nominal (NMOTLBO), frente de pareto robusta para o pior caso por amostragem com 20 amostras (RMOTLBO-WCSA), estimativa de pior caso de incerteza com 5 amostras

(RMOTLBO-WCE), e para as soluções que pertencem à frente de pareto do conjunto de soluções nominais perturbadas. Os resultados são exibidos na Tabela 1.

	NMOTLBO	RMOTLBO-WCSA	RMOTLBO-WCE	S. Nominais Perturbadas
<i>HV (Hypervolume)</i>				
Mediana	0,9034	0,6735	0,6404	0,5367
Média	0,9028	0,6738	0,6392	0,5357
Mínimo	0,8927	0,6592	0,6090	0,5038
Máximo	0,9045	0,6892	0,6461	0,5569
Desvio Padrão	0,0022	0,0078	0,0074	0,0131
<i>IGD (Inverted Generational Distance)</i>				
Mediana	0,0077	0,1425	0,1797	0,2431
Média	0,0099	0,1429	0,1800	0,2438
Mínimo	0,0067	0,1342	0,1790	0,2177
Máximo	0,0452	0,1516	0,1860	0,2723
Desvio Padrão	0,0074	0,0051	0,0013	0,0117

Tabela 1: Aplicação das métricas HV e IGD

Com base nos valores obtidos pelas métricas HV e IGD apresentadas na Tabela 1, as soluções robustas para o pior caso por amostragem (RMOTLBO-WCSA) encontradas são mais pessimistas em relação às soluções nominais, mas isso se deve ao fato das soluções WCSA estarem sujeitas às incertezas. A estimativa de pior caso de incerteza (RMOTLBO-WCE), foi ainda bem superior em termos de desempenho quando comparada com as soluções que pertencem à frente de pareto do conjunto de soluções nominais perturbadas.

Por fim, foi feita uma análise em torno do conjunto de soluções robustas para o pior caso por amostragem (RMOTLBO-WCSA). Neste experimento foi encontrada a fronteira de pareto robusta para quantidades de amostras de incertezas diferentes: 10 amostras, 20 amostras e 30 amostras. O resultado das frentes de pareto encontradas para cada um dos casos é mostrada na Figura 7.

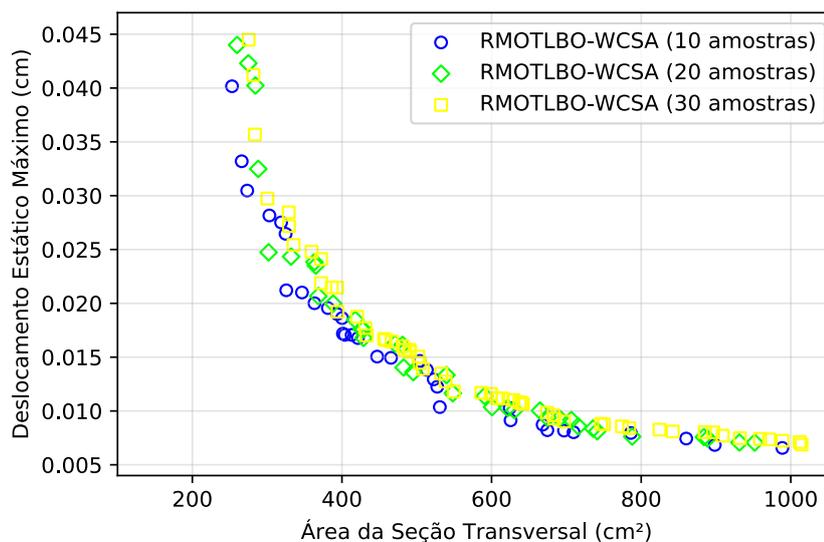


Figura 7: Gráfico representando as Soluções pertencentes ao Pior Caso por Amostragem (RMOTLBO-WCSA) encontradas para diferentes quantidades de amostras

Para gerar o resultado obtido na Figura 7, as métricas de desempenho HV e IGD foram

calculadas uma vez para cada um dos 30 experimentos, para cada um dos conjuntos de soluções WCSA com quantidades de amostras diferentes. O resultado da aplicação dessas métricas se encontram na Tabela 2.

RMOTLBO-WCSA	10 amostras	20 amostras	30 amostras
<i>HV (Hypervolume)</i>			
Mediana	0,6965	0,6371	0,6169
Média	0,6975	0,6364	0,6167
Mínimo	0,6806	0,6268	0,6063
Máximo	0,7195	0,6462	0,6242
Desvio Padrão	0,0108	0,0053	0,0043
<i>IGD (Inverted Generational Distance)</i>			
Mediana	0,0577	0,0931	0,1084
Média	0,0590	0,0926	0,1086
Mínimo	0,0469	0,0848	0,1016
Máximo	0,0748	0,1002	0,1211
Desvio Padrão	0,0063	0,0042	0,0043

Tabela 2: Aplicação das métricas HV e IGD

Como detalhado na Tabela 2, há relação entre a quantidade de amostras utilizada e o desempenho destas soluções. A relação é que quanto mais amostras temos para a resolução de um problema, pior será o desempenho destas soluções robustas, pois o pior caso será melhor aproximado.

8. Conclusão

O presente trabalho apresenta um algoritmo baseado na meta-heurística TLBO, para resolução da versão robusta do Problema da Viga em Seção I que leva em consideração as incertezas inerentes ao problema, através da meta-heurística Otimização Multiobjetivo baseada em Ensino e Aprendizagem.

Como detalhado na Seção 7, referente aos experimentos e resultados, as soluções nominais perturbadas foram em grande maioria dominadas pelas demais soluções de outras frentes e, assim, obteve-se um resultado esperado quanto às frentes de pareto robustas, tanto pela aplicação da técnica de pior caso por amostragem, quanto pela estimativa do pior caso de incerteza.

Mesmo utilizando duas técnicas para obter-se soluções robustas, o pior caso por amostragem (RMOTLBO-WCSA) e a estimativa do pior caso de incerteza (RMOTLBO-WCE), ainda assim, ambas estratégias se mostraram melhores em termos de desempenho e apresentaram sempre soluções factíveis, quando comparadas com as soluções nominais perturbadas através da aplicação das métricas HV e IGD.

As soluções robustas se mostraram piores em termos dos valores das funções objetivos quando comparadas com as soluções nominais, entretanto isso era esperado pelo fato das soluções robustas terem a presença de incertezas em suas variáveis de decisões.

Por meio do experimento que leva em consideração diferentes quantidades de amostras nas soluções robustas para o pior caso por amostragem (RMOTLBO-WCSA), obteve-se uma relação que diz respeito à quantidade de amostras utilizadas. Neste caso, quanto mais amostras são utilizadas, mais as soluções resultantes são pessimistas em relação às soluções que utilizam menor quantidade de amostras.

Isso se deve ao fato de que ao aumentar a quantidade de amostras, também aumenta o espaço de busca das soluções robustas, assim, quanto mais amostras temos, maior a probabilidade de termos soluções robustas com piores valores de funções objetivos.

Referências

- Bader, J. M. (2010). *Hypervolume-based search for multiobjective optimization: theory and methods*. Number 112. Johannes Bader.
- Ben-Tal, A., El Ghaoui, L., e Nemirovski, A. (2009). *Robust optimization*, volume 28. Princeton University Press.
- Beyer, H.-G. e Sendhoff, B. (2007). Robust optimization—a comprehensive survey. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196(33-34):3190–3218.
- Coello, C. A. C. e Christiansen, A. D. (1998). Two new ga-based methods for multiobjective optimization. *Civil Engineering Systems*, 15(3):207–243.
- Coello, C. A. C., Lamont, G. B., Van Veldhuizen, D. A., et al. (2007). *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*, volume 5. Springer.
- Deb, K. (2000). An efficient constraint handling method for genetic algorithms. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 186(2-4):311–338.
- Deb, K., Agrawal, S., Pratap, A., e Meyarivan, T. (2000). A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: Nsga-ii. In *International Conference on Parallel Problem Solving From Nature*, p. 849–858. Springer.
- Dubois, D. e Prade, H. (2009). Formal representations of uncertainty. *Decision-Making Process: Concepts and Methods*, p. 85–156.
- Mendes, M. H. S. Algoritmos evolucionários intervalares para otimização robusta multiobjetivo. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 2013.
- Perny, P., Spanjaard, O., e Storme, L.-X. (2006). A decision-theoretic approach to robust optimization in multivalued graphs. *Annals of Operations Research*, 147(1):317–341.
- Rao, R. V., Savsani, V. J., e Vakharia, D. (2011). Teaching–learning-based optimization: a novel method for constrained mechanical design optimization problems. *Computer-Aided Design*, 43(3):303–315.
- Sabioni, C. L. Desenvolvimento de métodos para solução de problemas de otimização multiobjetivo com incertezas. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 2017.
- Soares, G. L., Adriano, R. L., Maia, C. A., Jaulin, L., e Vasconcelos, J. A. (2009). Robust multi-objective team 22 problem: A case study of uncertainties in design optimization. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(3):1028–1031.
- Steiner, G., Weber, A., e Magele, C. (2004). Managing uncertainties in electromagnetic design problems with robust optimization. *IEEE transactions on magnetics*, 40(2):1094–1099.
- Zou, F., Wang, L., Hei, X., Chen, D., e Wang, B. (2013). Multi-objective optimization using teaching-learning-based optimization algorithm. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 26(4):1291–1300.